



POLITECNICO DI MILANO  
DIPARTIMENTO DI ELETTROTECNICA

# Incertezza di Misura: Concetti di Base

***Roberto Ottoboni***

Dipartimento di Elettrotecnica  
Politecnico di Milano

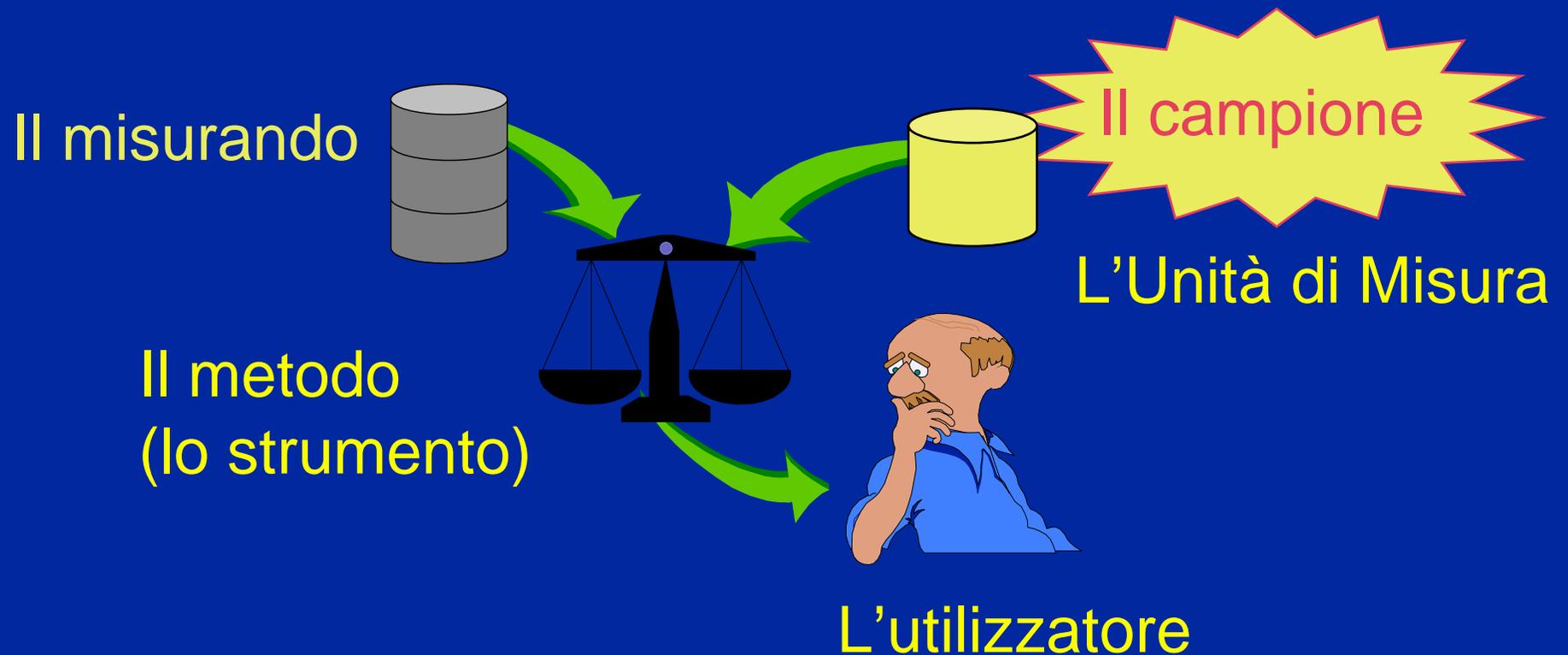


## Il concetto di “misura”

- Nella sua accezione più comune si è sempre inteso come **misura di una grandezza** il suo rapporto ad un'altra, con essa **omologa**, alla quale si attribuisce il carattere **di unità di misura**.
- La misura è un **prodotto!**

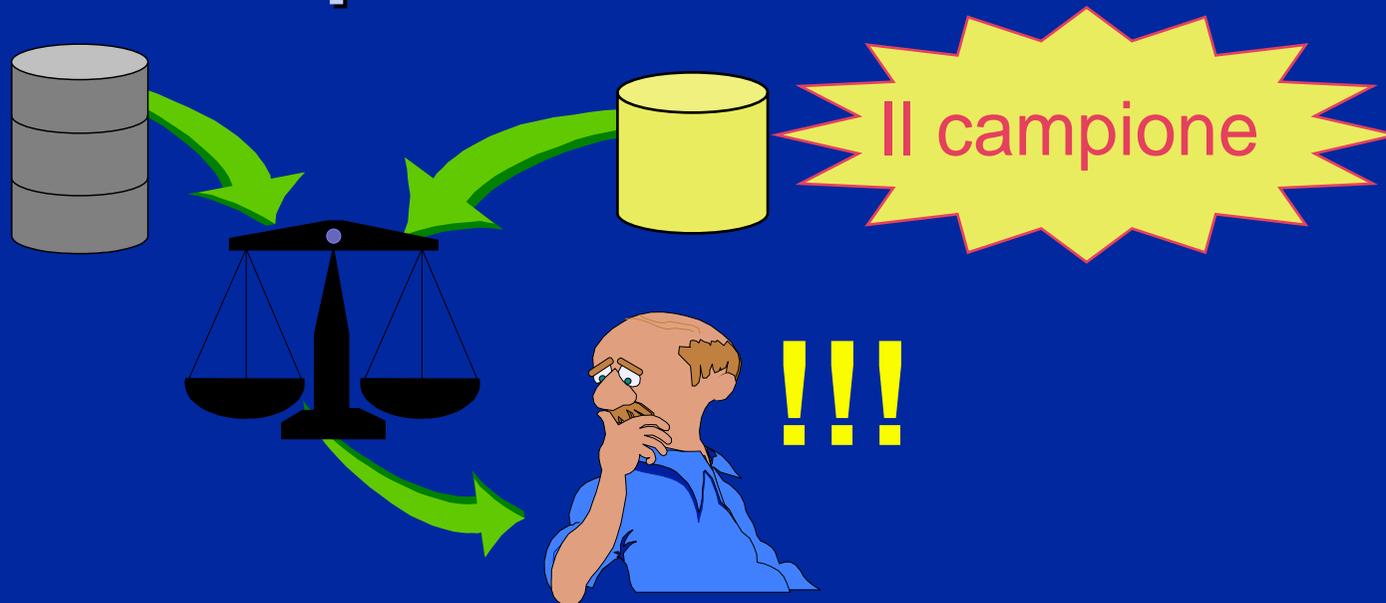


## Il concetto di “misura”





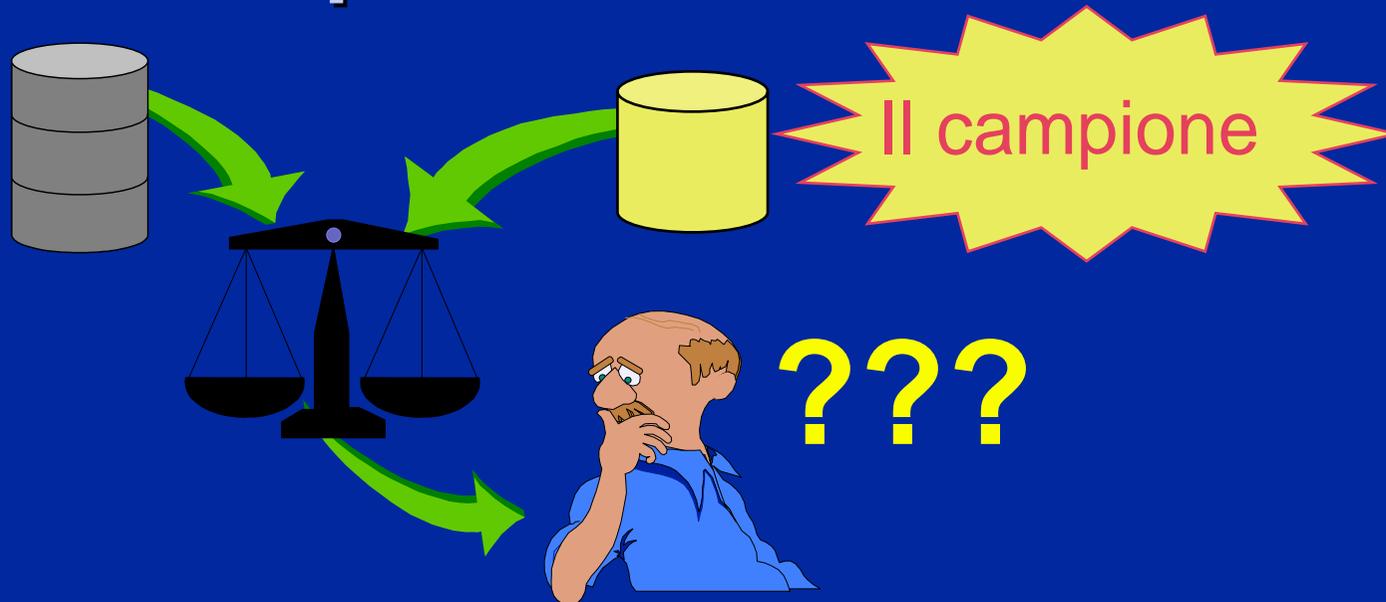
## Il prodotto misura



- Misurare significa acquisire informazioni.
- Misurare è conoscere.



## Il prodotto misura



- Misurare significa acquisire informazioni.
- Misurare è conoscere.

Il grado di conoscenza è incompleto



## Conoscenza Sperimentale

- La scienza delle Misure non è una scienza esatta!
  - Una grandezza fisica può essere determinata soltanto ad un livello finito di “incertezza”



## Conoscenza Sperimentale

- Problema della “qualità” della misura, ovvero definirne l’attendibilità
- Due differenti approcci:
  - Errori di misura
  - Incertezze di misura



## Teoria degli Errori

- Due differenti approcci:
  - Esiste la speranza di ancorare la conoscenza sperimentale ai **valori veri** di una misura.

⇒ **TEORIA DEGLI ERRORI**

$$e = M - V$$

- $M$  = valore misurato
- $V$  = valore vero, oppure convenzionalmente vero



## Conoscenza Sperimentale

- Due differenti approcci:

- Esiste comunque un grado di **indeterminazione** da associare alla misura. Si riconosce di una imperfezione intrinseca alla conoscenza ottenibile mediante misure.

⇒ **TEORIA DELL'INCERTEZZA**

L'incertezza è un parametro associato al risultato della misura che caratterizza la **dispersione** dei valori che possono essere ragionevolmente attribuiti al misurando.

Rappresenta la stima eseguita secondo **procedimenti convenzionali** del nostro livello di **non conoscenza** del misurando



## Teoria dell'Incertezza

- L'incertezza è componente essenziale delle informazioni di misura.



## Teoria dell'Incertezza

- L'incertezza è componente essenziale delle informazioni di misura.
- L'incertezza di misura prodotta da uno strumento appartiene all'insieme di specifiche importanti che il costruttore deve precisare e garantire



## Teoria dell'Incertezza

- L'incertezza è componente essenziale delle informazioni di misura.
- L'incertezza di misura prodotta da uno strumento appartiene all'insieme di specifiche importanti che il costruttore deve precisare e garantire
- L'incertezza può essere assunta a rappresentare la qualità totale di una misura solo se la si confronta con le prescrizioni connesse alla sua utilizzazione.



POLITECNICO DI MILANO  
DIPARTIMENTO DI Elettrotecnica

# Trattamento dell'Incertezza

NORMA UNI CEI ENV 13005

Fornisce la procedura di calcolo per la valutazione dell'incertezza.



# Trattamento dell'Incertezza

## NORMA UNI CEI ENV 13005

Fornisce la procedura di calcolo per la valutazione dell'incertezza.

Rappresenta una condizione necessaria ma **non sufficiente** per poter affrontare correttamente la stima dell'incertezza di misura.



## Il concetto di “misura”

In generale:

$$Y = F(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_N)$$

a causa dell'incertezza di misura, nella *pratica*  
questa relazione diventa:

$$y = F(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N) + \delta$$

( $\delta$ : incertezza sul modello)



## Stima dell'Incertezza di misura sulla singola variabile

- La stima si conduce sulla base di due strumenti matematici
  - Categoria A
    - Analisi statistica di serie di osservazioni



## Stima dell'Incertezza di misura sulla singola Misura

- La stima si conduce sulla base di due strumenti matematici
  - Categoria A
    - Analisi statistica di serie di osservazioni
  - Categoria B
    - Mezzi diversi dall'analisi statistica di serie di osservazioni



## Stima dell'Incertezza di misura sulla singola Misura

- Sono considerate  $k$  letture indipendenti  $x_{jh}$  ( $h = 1 \dots k$ ) della grandezza  $X_j$ , assunta come variabile aleatoria, eseguite nelle stesse condizioni sperimentali.



## Stima dell'Incertezza Cat. A

- Sono considerate  $k$  letture indipendenti  $x_{jh}$  ( $h = 1 \dots k$ ) della grandezza  $X_j$ , assunta come variabile aleatoria, eseguite nelle stesse condizioni sperimentali.
- La stima del valore sperato è la **media aritmetica** delle osservazioni.

$$\bar{x}_j = \frac{1}{k} \sum_{h=1}^k q_{jh}$$



## Stima dell'Incertezza Cat. A

- La **varianza sperimentale**  $s^2$ , stima della varianza  $\sigma^2$  della distribuzione di probabilità di  $X_j$ :

$$s^2(x_j) = \frac{1}{k-1} \sum_{h=1}^k \left( x_{jh} - \bar{x}_j \right)^2$$



## Stima dell'Incertezza Cat. A

- La varianza sperimentale  $s^2$ , stima della varianza  $\sigma^2$  della distribuzione di probabilità di  $X_j$ :

$$s^2(x_j) = \frac{1}{k-1} \sum_{h=1}^k \left( x_{jh} - \bar{x}_j \right)^2$$

- La miglior stima della varianza della media sperimentale:

$$s^2(\bar{x}_j) = \frac{s^2(x_{jh})}{k}$$



## Stima dell'Incertezza Cat. A

$$s(\bar{x}_j) = \sqrt{s^2(\bar{x}_j)} = \sqrt{\frac{s^2(x_{jh})}{k}}$$

- $s(\bar{x}_j)$  è chiamato **scarto tipo sperimentale della media** e rappresenta l'**incertezza tipo di categoria A**.



## Stima dell'Incertezza Cat. A

- *L'affidabilità nella valutazione di  $s(x_j)$  dipende dal numero di gradi di libertà,  $\nu$ :*

$$\nu = k - 1$$

- NORMA UNI CEI ENV 13005: ?
- EA-4/02:  $k \geq 10$



## Stima dell'Incertezza Cat. B

- La grandezza **non** è ottenuta da osservazioni ripetute, e la sua distribuzione è valutata “**a priori**” sulla base di:
  - dati di misurazioni precedenti
  - esperienza dell'operatore
  - specifiche tecniche del costruttore
  - dati forniti in certificati di taratura (fattori correttivi)
  - ...



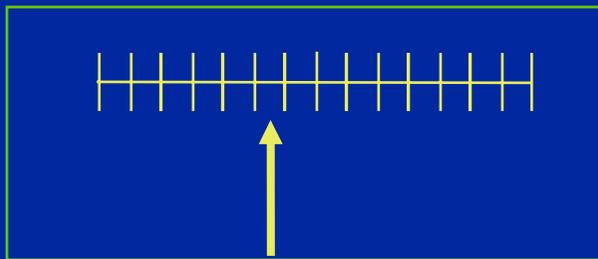
## Stima dell'Incertezza Cat. B

- La grandezza non è ottenuta da osservazioni ripetute, e la sua distribuzione è valutata “a priori” sulla base di:
  - dati di misurazioni precedenti
  - esperienza dell'operatore
  - specifiche tecniche del costruttore
  - dati forniti in certificati di taratura (fattori correttivi)
  - ...
- Dalla valutazione della distribuzione si deduce la **varianza stimata  $u^2(x_j)$**  e l'**incertezza tipo  $u(x_j)$**



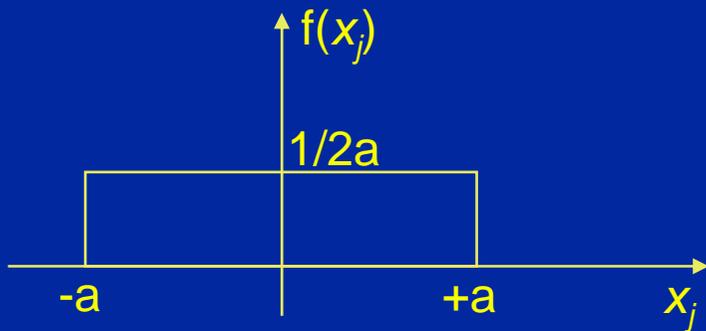
## Stima dell'Incertezza Cat. B

**Risoluzione:** è la capacità dello strumento di risolvere stati diversi del misurando, senza alcuna implicazione sulla capacità di valutare l'entità della variazione.





## Stima dell'Incertezza Cat. B



$$u^2(x_j) = \int_{-a}^{+a} f(x_j) dx_j = \frac{a^2}{3}$$

Rientrano in questo caso:

- la classe degli strumenti
- la fascia d'errore

$$u(x_j) = \frac{a}{\sqrt{3}}$$



## Composizione delle Incertezze per la misura indiretta

- In generale:  $y = F(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N)$
- L'incertezza composta  $u_c$  si ottiene attraverso la combinazione (propagazione) delle incertezze composte relative alla conoscenza delle singole grandezze  $X_i$  che intervengono nella misura.



## Composizione delle Incertezze per la misura indiretta

- In generale:  $y = F(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N)$
- L'incertezza composta  $u_c$  si ottiene attraverso la combinazione (propagazione) delle incertezze composte relative alla conoscenza delle singole grandezze  $X_i$  che intervengono nella misura.
- Il funzionale  $F(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N)$  ovviamente interviene a determinare i “pesi” con cui le incertezze delle misure  $x_i$  contribuiscono all'incertezza di  $y$ .



## Composizione delle Incertezze per la misura indiretta

- Legge di propagazione dell'incertezza

$$u_c^2(y) = \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial F}{\partial x_j} \right)^2 u^2(x_j) + 2 \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{p=j+1}^N \left( \frac{\partial F}{\partial x_j} \right) \left( \frac{\partial F}{\partial x_p} \right) \cdot u(x_j, x_p) + \dots$$

dove  $u(x_j, x_p)$  rappresenta la stima della covarianza tra  $x_j$  e  $x_p$ .



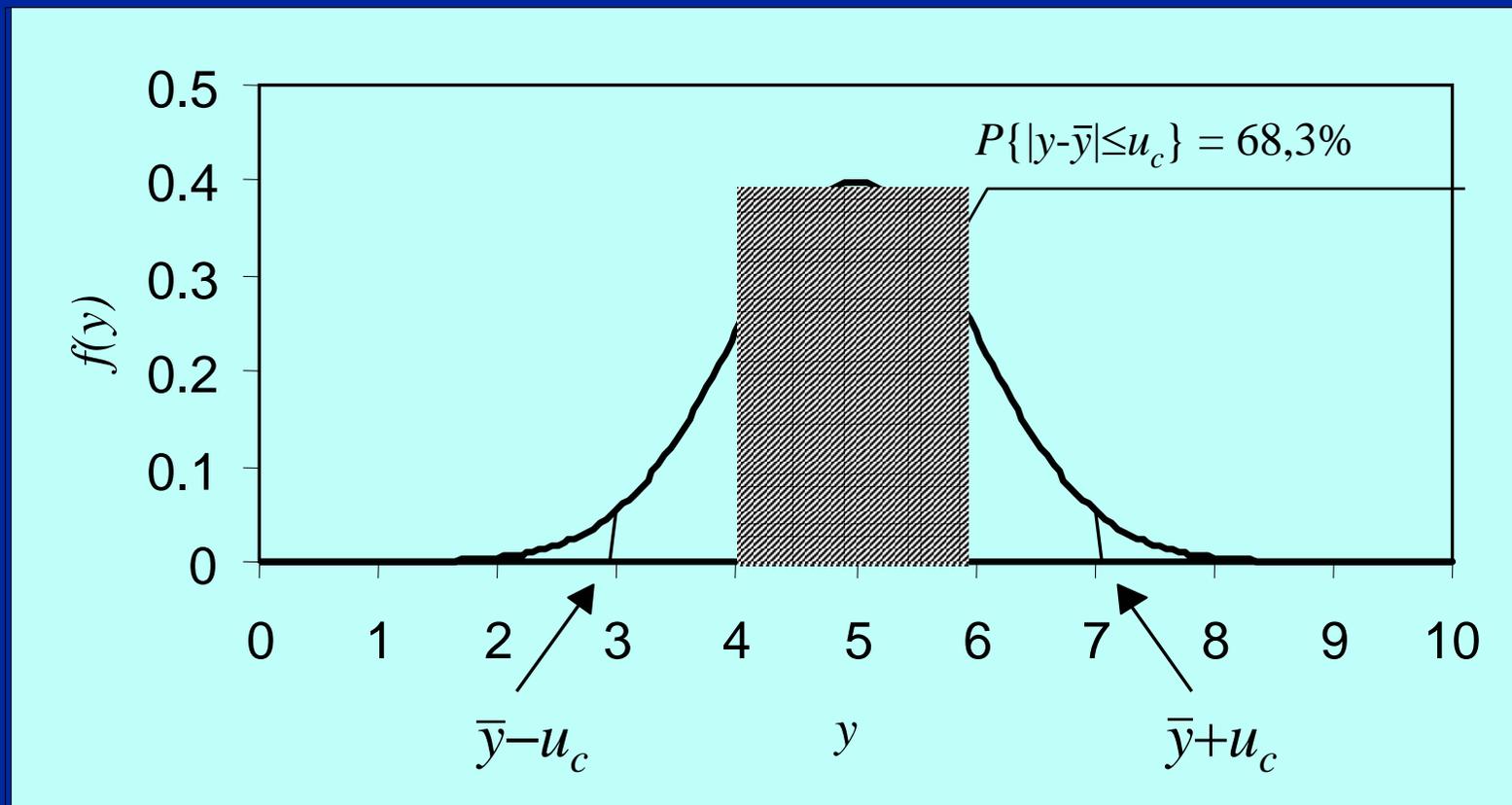
## Composizione delle Incertezze per la misura indiretta

- Legge di propagazione dell'incertezza
  - se  $u(x_j, x_p) = 0$

$$u_c^2(y) = \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial F}{\partial x_j} \right)^2 u^2(x_j)$$



# Incertezza Composta



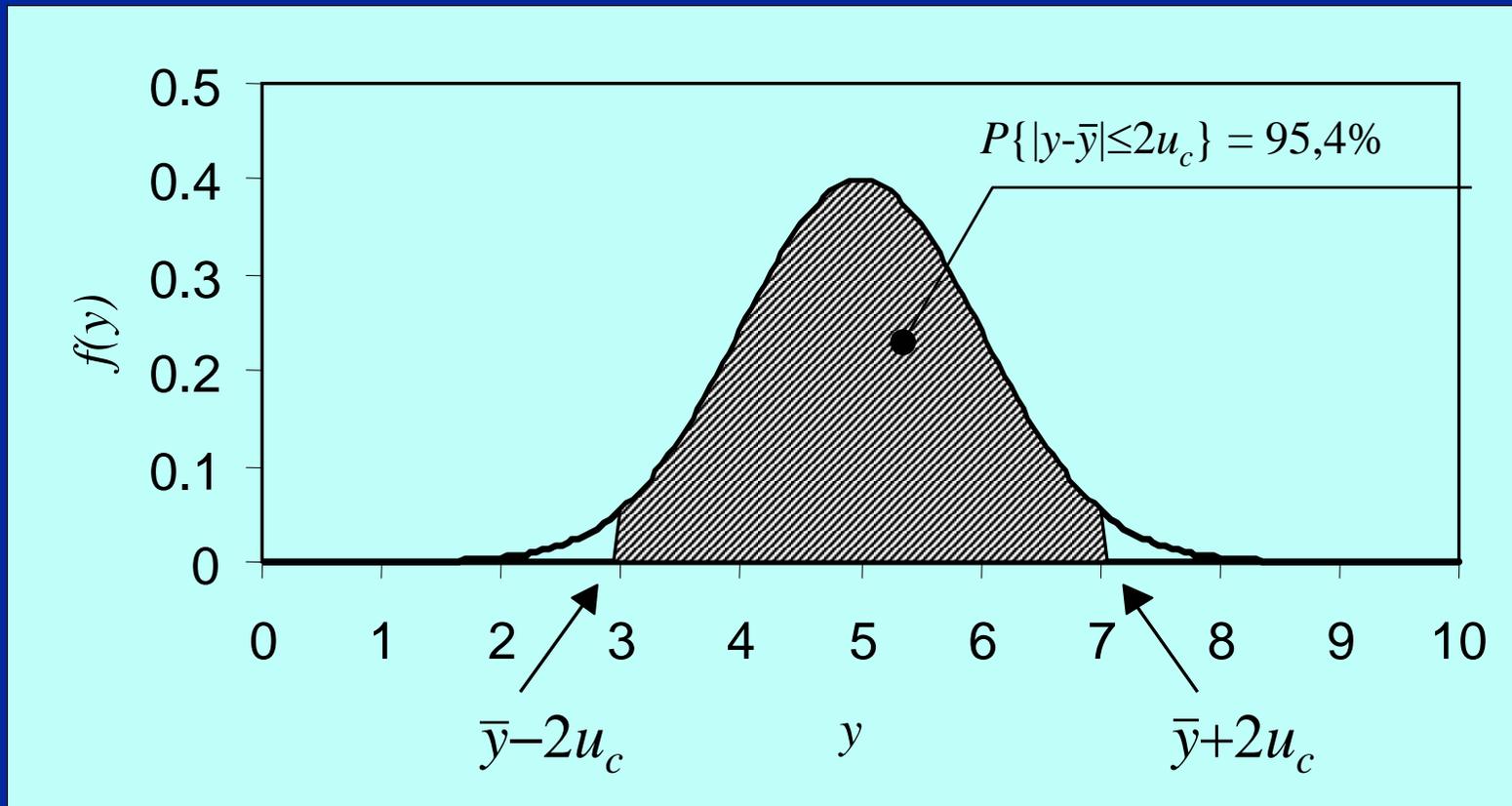


## Incertezza Estesa

- Si fornisce anche una **incertezza estesa (globale)  $U$** , ottenuta moltiplicando  $u_c$  per un **fattore di copertura  $k$**  (compreso fra 2 e 3).
- Nell'ipotesi di **distribuzione normale** il **fattore di copertura** determina il **grado di confidenza**



# Incertezza Estesa





## Incertezza Estesa

- Problema: si è ragionevolmente sicuri che la distribuzione del misurando  $y$  è di tipo normale?
- Si se  $u_c$  deriva dalla composizione di almeno tre componenti di incertezza, originate da distribuzioni di probabilità accertate.



## Incertezza Estesa

- Problema: si è ragionevolmente sicuri che la distribuzione del misurando  $y$  è di tipo normale?
- No: si utilizza il criterio dei gradi di libertà effettivi (EA-4/02).



## Gradi di Libertà Effettivi

- Formula di Welch-Satterthwaite

$$v_{eff} = \frac{u^4(y)}{\sum_{j=1}^N \frac{u_j^4(y)}{v_j}}$$

$v_{eff}$	1	2	4	6	8	10	20	50	$\infty$
$k$	13.97	4.53	2.87	2.52	2.37	2.28	2.13	2.05	2.00